Но чтобы использовать до конца геометрические ресурсы, которыми располагали тогда, либо для более точного определения π, либо для более строгого приложения измерений углов, — необходимо было сначала, чтобы в том почувствовалась потребность, и необходима была далее огромная энергия, чтобы довести до конца выкладки, в которых приходилось иметь дело с извлечениями различных квадратных корней. Потребность эта почувствовалась с особенной силой лишь после более точного определения наклона эклиптики Эратосфеном и при измерении им величины градуса меридиана. В этом последнем вопросе, чтобы применить к вычислению диаметра земли разность высот полюса в двух местах, расположенных приблизительно на одном и том же меридиане, и расстояние между этими местами, необходимо было иметь достаточно точное значение π. Архимеду в его „Измерении окружности" удалось справиться со всеми этими трудностями; поэтому мы дадим здесь краткое изложение названного труда, хотя, к сожалению, в нем не содержится никакого прямого указания на то, как Архимед справился с наибольшей из указанных трудностей, именно с извлечением крадратных корней.

Архимед сначала показывает путем доказательства методом исчерпывания, что площадь круга равна площади треугольника, основанием которого является длина окружности, а высотой — радиус круга. Таким образом квадратура круга сводится к вычислению длины окружности. Затем он доказывает, что отношение длины окружности к диаметру, т. е. число, обозначаемое нами теперь буквой π, меньше $3^1/_7$ и больше $3^{10}/_{71}$: действительно, периметр вписанного 96-угольника больше $3\frac{10}{71}d$, а периметр описанного 96-угольника меньше $3\frac{1}{7}d$, где d означает диаметр круга.

Архимед приходит к этому результату, определяя на основании отношений между сторонами прямоугольного треугольника с углом x отношения между сторонами прямоугольного треугольника с углом $\frac{1}{2}x$. Когда затем он разыскивает верхний предел для длины окружности, то он придает треугольникам с углами x и $\frac{1}{2}x$ общий катет, прилежащий к этим углам; когда же он разыскивает нижний предел, то, наоборот, он берет у этих треугольников общую гипотенузу; но в обоих случаях можно, пользуясь нашей тригонометрической символикой, выразить зависимость между отношениями через:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}x=\frac{\sin x}{1+\cos x}\left(\text{или }\frac{\operatorname{tg}x}{\sec x+1}\right).$$

Однако в приложениях не наблюдается указанного единообразия: действительно, в одном случае он употребляет верхние пределы для квадратных корней, получающихся при переходе